RODOLFO GUIDOBONO	CURSO DE MECÁNICA TEÓRICA J. GARCÍA - EJERCICIO CAP. 15	HOJA N° 1 FECHA 29/8/19

Dada la acción de una partícula relativista

$$S_{[x(t)]} = \int_{t_1}^{t_2} -mc^2 \sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}\, dt$$

a) Demostrar que la transformación siguiente deja invariante la acción S

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad v \equiv \text{constante}$$

b) Encontrar las transformaciones infinitesimales.

EJERCICIO a)

$$ct'_{(x,t)} = \gamma c t - \gamma\beta x \qquad \partial t'/\partial x = -\frac{\gamma\beta}{c} \qquad \partial t'/\partial t = \gamma$$

$$x'_{(x,t)} = -\gamma\beta ct + \gamma x \qquad \partial x'/\partial x = \gamma \qquad \partial x'/\partial t = -\beta c\gamma$$

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x}.dx + \frac{\partial x'}{\partial t} dt = \gamma\, dx - \beta c \gamma\, dt$$

$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial x} dx + \frac{\partial t'}{\partial t} dt = -\frac{\gamma\beta}{c} dx + \gamma\, dt = \left(-\frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt} + \gamma\right) dt$$

$$= \left(-\frac{\gamma\beta}{c}\dot{x} + \gamma\right) dt$$

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\, dx - \beta c\, \gamma\, dt}{-\frac{\gamma\beta}{c} dx + \gamma\, dt} = \frac{\gamma\,(dx/dt - \beta c)\, dt}{\gamma\,(-\beta/c\, \dot{x} + 1)\, dt} = \frac{\dot{x} - \beta c}{1 - \beta/c\, \dot{x}}$$

$$\frac{\dot{x}'}{c} = \frac{(\dot{x}/c) - \beta}{1 - \beta\,(\dot{x}/c)}$$

Dejar invariante la acción significa que:

$$S[x_{(t)}] = S[x'_{(t')}] = \int_{t_1'}^{t_2'} -mc^2 \sqrt{1 - \frac{(\dot{x}')^2}{c^2}}\, dt'$$

Para ello debería cumplirse que

$$\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}')^2}{c^2}}\, dt' = \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}\, dt$$

NOTA

$$1-\left(\frac{\dot{x}'}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{\dot{x}/c-\beta}{1-\beta(\dot{x}/c)}\right)^2 = \frac{(1-\beta(\dot{x}/c))^2-((\dot{x}/c)-\beta)^2}{(1-\beta(\dot{x}/c))^2}$$

$$1-\left(\frac{\dot{x}'}{c}\right)^2 = \frac{(1-\beta^2)(1-(\dot{x}/c)^2)}{(1-\beta(\dot{x}/c))^2}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}'}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}}{(1-\beta(\dot{x}/c))} = \frac{\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}}{\left(-\frac{\gamma\beta}{c}\dot{x}+\gamma\right)}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}'}{c}\right)^2}\,dt' = \frac{\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}}{\left(-\frac{\gamma\beta}{c}\dot{x}+\gamma\right)}\cdot\left(-\frac{\gamma\beta}{c}\dot{x}+\gamma\right)dt$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}'}{c}\right)^2}\,dt' = \sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}\,dt$$ que es la igualdad que estábamos buscando para que S sea invariante.

EJERCICIO 5)

En el ejemplo del capítulo 14, Javier propuso un cambio de coordenadas

$y_{(t)} = \lambda\, x_{(t)}$ que parametrizó como $y = e^{\varepsilon} x$ con $\varepsilon \ll 1$

en la transformación lorentziana $x'_{(x,t)}$ es función de 2 variables.

En forma matricial
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

que puede expresarse como $\overline{X}' = A\,\overline{X}$

Así como para una variable se usó $y = e^{\varepsilon} x$, podemos plantear que

$\overline{X}' = e^{E}\,\overline{X}$ donde E es una matriz tal que $E.E \approx 0$

entonces $\overline{X}' \approx (I+E)\,\overline{X}$

En un espacio-tiempo plano el elemento de línea, invariante, es $ds^2 = d(ct)^2 - dx^2$

la métrica g es
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser ds^2 invariante también lo es el producto escalar

$$\overline{X}' \cdot \overline{X}' = \overline{X} \cdot \overline{X}$$

$$\overline{X}' \cdot \overline{X}' = \overline{X}'^T g \overline{X}' \qquad \overline{X}' = A\overline{X}$$

$$\left.\begin{array}{l} = (A\overline{X})^T g (A\overline{X}) = \overline{X}^T A^T g A \overline{X} \\ \overline{X} \cdot \overline{X} = \overline{X}^T \; g \; \overline{X} \end{array}\right\} \Rightarrow A^T g A = g$$

$$A = I + E$$

$$(I+E)^T g (I+E) = (I + E^T) g (I+E) = (I+E^T)(g + gE)$$

$$= g + gE + E^T g + E^T g E \qquad \text{pero } E^T E \approx 0$$

$$\cong g + gE + E^T g$$

$$A^T g A \cong g + gE + E^T g = g \quad \Rightarrow \quad gE + E^T g \approx 0$$

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad y \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b-c \\ b-c & -2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = d = 0 \\ b = c \end{array}$$

$E = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ b es infinitesimal $E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

Para tener una matriz A con componentes de la forma e^{ε} debemos diagonalizar E. de modo que $E = S \Lambda S^{-1}$ Λ es la matriz ~~diag~~ diagonal

S : sus columnas son los autovectores

$$e^E = I + E + \frac{1}{2} E^2 + \cdots$$

$$= I + S\Lambda S^{-1} + \frac{1}{2} S \Lambda^2 S^{-1} + \cdots$$

$$= S I S^{-1} + S\Lambda S^{-1} + \frac{1}{2} S\Lambda^2 S^{-1} \cdots$$

$$= S\left(I + \Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2 + \cdots\right) S^{-1} = S e^{\Lambda} S^{-1}$$

$$e^{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

HOJA Nº 4

FECHA

Para $\mathcal{E}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \varepsilon$ $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = -\varepsilon$ $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad e^{\lambda} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\mathcal{E}} = S e^{\lambda} S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon} & e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon} \\ e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon} & e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varepsilon & \operatorname{senh}\varepsilon \\ \operatorname{senh}\varepsilon & \cosh\varepsilon \end{pmatrix}$$

Pero $e^{\mathcal{E}}$ debe ~~se~~ comportarse como A infinitesimalmente, pero vemos que $A_{11} > 0$ $A_{22} > 0$ y que $e^{\mathcal{E}}_{11} > 0$ $e^{\mathcal{E}}_{22} > 0$

$A_{21} < 0$ $A_{12} < 0$ $e^{\mathcal{E}}_{12} < 0$ $e^{\mathcal{E}}_{21} < 0$

como el cosh es una función par y el senh es impar, si se cambia el signo a ε, de modo que $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

se llega a $e^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cosh\varepsilon & -\operatorname{senh}\varepsilon \\ -\operatorname{senh}\varepsilon & \cosh\varepsilon \end{pmatrix}$

La transformación infinitesimal resulta

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varepsilon & -\operatorname{senh}\varepsilon \\ -\operatorname{senh}\varepsilon & \cosh\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

NOTA